Kolokwium — Funkcje Analityczne

07.12.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)

Obliczyć całkę

$$\int_{S(0,2)} \frac{e^z}{(z+3)^3 \sin^2(z+1)} dz,$$

gdzie $S(0,2)$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w 0 i promieniu 2.

Podpowiedź: co możemy powiedzieć o zachowaniu funkcji $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ w otoczeniu punktu $z_0 = 0$?

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Mamy $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, zatem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} z^2 + \cdots$$

jest holomorficzna. Dodatkowo $f'(0) = 0$.

Całkę z zadania możemy zapisać w postaci

$$\int_{S(0,2)} \frac{e^z}{(z+3)^3 \sin^2(z+1)} dz = \int_{S(0,2)} \frac{g(z)}{(z+1)^2} dz,$$

gdzie $g(z) = \frac{e^z}{(z+3)^3 f(z+1)^2}$ jest holomorficzna na $D(0,2)$. Zatem, korzystając ze wzoru Cauchy'ego, otrzymujemy

$$\int_{S(0,2)} \frac{e^z}{(z+3)^3 \sin^2(z+1)} dz = \int_{S(0,2)} \frac{g(z)}{(z+1)^2} dz = 2\pi i g'(-1).$$

Mamy

$$g'(z) = \frac{e^z (z+3)^3 f(z+1)^2 - e^z \left[3(z+3)^2 f(z+1)^2 + (z+3)^3 \cdot 2f(z+1) \cdot f'(z+1)\right]}{(z+3)^6 f(z+1)^4},$$

stąd

$$g'(-1) = \frac{-1}{16e},$$

zatem

$$\int_{S(0,2)} \frac{e^z}{(z+3)^3 \sin^2(z+1)} dz = \frac{-\pi i}{8e}.$$

Zadanie 2 (10 p.)

Niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus \big(\overline{D}(1,1) \cup \overline{D}(-1,1)\big)$.

(a) (5 p.) Znajdź odwzorowanie konforemne, które przekształca obszar Ω na obszar

$$\Omega_1 = D(0,1) \setminus \{p\},$$

gdzie $p \in D(0,1)$ (punkt p proszę sobie wybrać samemu).
Podpowiedź: w tym punkcie będą potrzebne homografie oraz jedno odwzorowanie, które homografią nie jest. Można poszukać inspiracji w notatkach.

(b) (5 p.) Znajdź odwzorowanie konforemne, które przekształca obszar Ω na obszar

$$\Omega_2 = \{z\colon |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0\} \setminus \{q\},$$

gdzie $q \in \{z\colon |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ (tak jak w poprzednim punkcie, punkt q proszę wybrać samemu).

Rozwiązanie:

(a) Mamy ciąg przekształceń

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{f_1} & \{z\colon -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\} \setminus \{0\} & \xrightarrow{f_2} & \{z\colon -\pi/2 < \mathrm{Im}(z) < \pi/2\} \setminus \{0\} \\ & & & & \big\downarrow f_3 \\ & & D(0,1)\setminus\{0\} & \xleftarrow[f_4]{\qquad\qquad} & \{z\colon \mathrm{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\} \end{array}$$

gdzie

$$f_1(z) = \frac{1}{z},\ f_2(z) = i\pi z,\ f_3(z) = \exp(z),\ f_4(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Zatem odwzorowanie

$$f(z) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = \frac{\exp(\pi i/z) - 1}{\exp(\pi i/z) + 1}$$

przekształca konforemnie obszar Ω na $D(0,1) \setminus \{0\}$.

(b) Znajdziemy najpierw przekształcenie konforemne $g\colon \Omega_2 \to D(0,1) \setminus \{0\}$, gdzie $q = 1/2$. Mamy ciąg przekształceń

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_2 & \xrightarrow{g_1} & \{z\colon 0 < \mathrm{Arg}(z) < \pi/2\} \setminus \{q_1\} & \xrightarrow{g_2} & \{z\colon \mathrm{Im}(z) > 0\} \setminus \{q_2\} \\ & & & & \big\downarrow g_3 \\ & & & & D(0,1)\setminus\{0\} \end{array}$$

gdzie

$$g_1(z) = \frac{i-z}{z+i},\ g_2(z) = z^2,\ g_3(z) = \frac{z-q_2}{z-\overline{q_2}},$$

oraz

$$q_1 = g_1(1/2) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i, \ q_2 = g_2(q_1) = q_1^2 = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i.$$

Zatem

$$g(z) = (g_3 \circ g_2 \circ g_1)(z)$$

przekształca konforemnie obszar Ω_2 na obszar $D(0,1) \setminus \{0\}$. Zatem $h = g^{-1} \circ f$ przekształca konforemnie obszar Ω na Ω_2.

Zadanie 3 (10 p.)

Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Załóżmy, że zbiór $U \subseteq \mathbb{C}$ jest otwarty oraz $0 \in U$, a określona na nim funkcja $g \colon U \to D$ jest ciągła.

(a) (5 p.) Proszę udowodnić, że jeśli

$$\sin(g(z)) = z^{2023},$$

dla wszystkich $z \in U$, to funkcja g jest holomorficzna na U.

(b) (5 p.) Znajdź rozwinięcie funkcji g w szereg potęgowy w otoczeniu $z_0 = 0$.

Rozwiązanie:

(a) Po pierwsze, zauważmy, że funkcja $f(z) = \sin(z)$ posiada holomorficzną funkcję odwrotną na dysku $D(0,1)$. Aby udowodnić ten fakt zauważmy, że $f'(z) = \cos(z)$, zatem

$$f'(z) = 0 \iff \cos(z) = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Pokażemy jeszcze, że funkcja f jest różnowartościowa na $D(0,1)$. Niech $h(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$, wówczas $f(z) = \sin(z) = h(-i\exp(iz))$. Mamy

$$\begin{aligned} h(z_1) = h(z_2) &\iff 0 = \left[(z_1 - z_2) + \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)\right] = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) \\ &\iff z_1 = z_2 \text{ lub } z_1 z_2 = 1. \end{aligned}$$

W konsekwencji,

$$\begin{aligned} \sin(z_1) = \sin(z_2) &\iff \exp(iz_1) = \exp(iz_2) \text{ lub } \exp(i(z_1 + z_2)) = -1 \\ &\iff z_1 - z_2 = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \text{ lub } z_1 + z_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zatem, na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej, funkcja $f \colon D(0,1) \to f(D(0,1))$ jest konforemnym dyfeomorfizmem. W szczególności, funkcja odwrotna $f^{-1}(z) = \arcsin(z)$ jest również konforemnym dyfeomorfizmem $f^{-1} \colon f(D(0,1)) \to D(0,1)$. W szczególności, funkcja f^{-1} jest holomorficzna na zbiorze otwartym $f(D(0,1))$. W konsekwencji,

$$g(z) = \arcsin(z^{2023})$$

jest holomorficzna jako złożenie dwóch funkcji holomorficznych.

(b) Znajdziemy najpierw rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $f^{-1}(z) = \arcsin(z)$. Na mocy wzoru na pochodną funkcji odwrotnej, dla dowolnego $z \in \Omega = f(D(0,1))$, mamy

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{\cos(w)},$$

gdzie $w = f^{-1}(z)$. Zatem

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Zbiór Ω jest jednospójny (bo jest dyfeomorficzny z $D(0,1)$) oraz $\pm 1 \notin \Omega$. Zatem, na Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$. Do wyliczenia pochodnej funkcji (f^{-1}) ustalamy gałąź funkcji $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$, która przyjmuje wartości rzeczywiste dodatnie, dla rzeczywistych z spełniających $|z| < 1$.

Aby rozwinąć funkcję $(f^{-1})'(z)$ w szereg potęgowy w otoczeniu $z_0 = 0$ skorzystamy z uogólnionego wzoru dwumianowego (proszę poszukać w notatkach). Mamy

$$(f^{-1})'(z) = \left(1 - z^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} z^{2n}, \tag{1}$$

gdzie, dla dowolnego liczby całkowitej nieujemnej n oraz dowolnej liczby zespolonej z, definiujemy

$$\binom{z}{n} = \frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1)}{n!}.$$

Całkując wyraz po wyrazie rozwinięcie (1) znajdujemy

$$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} z^{2n+1}.$$

Zatem

$$g(z) = \arcsin\left(z^{2023}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-1/2}{n} \left(z^{2023}\right)^{2n+1}.$$

Wzorcowe rozwiązanie zadania czwartego z kolokwium

Zadanie. Udowodnić, że nie istnieje funkcja holomorficzna $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ taka, że

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

dla każdego $z_0 \in \mathbb{C}$ spełniającego $|z_0| = 1$.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że istnieje funkcja f o własności podanej w zadaniu niech $Z(f) = \{z \in D(0,1) : f(z) = 0\}$. Oczywiście funkcja f nie może być tożsamościowo równa zeru, więc z zasady identyczności zbiór $Z(f)$ nie może mieć punktów skupienia w $D(0,1)$. Nie może posiadać on również punktów skupienia na $\partial D(0,1)$, bo wtedy istniałby ciąg punktów $z_n \in D(0,1)$ taki, że $f(z_n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $z_n \to z_0$ dla pewnego z_0 o module 1, co przeczy założeniu. Zatem zbiór $Z(f)$ jest skończony i niech $Z(f) = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Niech również $\{n_1, \ldots, n_k\}$ będą krotnościami odpowiednich zer. Określmy funkcję $g : D(0,1) \setminus Z(f) \to \mathbb{C}$ za pomocą wzoru

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{l=1}^{k} (z - z_l)^{n_l}}$$

Kładąc

$$g(z_m) = \frac{1}{\prod_{l \in \{1,\ldots k\} \setminus \{m\}} (z_m - z_l)^{n_l}} \lim_{z \to z_l} \frac{f(z)}{(z - z_l)^{n_l}} \text{ dla } m \in \{1, \ldots, k\}.$$

otrzymujemy funkcję analityczną $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$, która nie ma zer i nadal spełnia założenie z zadania. Skoro g nie ma zer, to możemy określić $h = \frac{1}{g} : D(0,1) \to \mathbb{C}$, które również jest funkcją analityczną w $D(0,1)$. Teraz dla dowolnego $z_0 \in \partial D(0,1)$ mamy

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = 0.$$

Zatem h rozszerza się do funkcji ciągłej na $\overline{D(0,1)}$ poprzez położenie $h(z) = 0$ dla wszystkich z o module 1. Przeczy to oczywiście zasadzie maksimum i kończy rozwiązanie zadania.